Каспарян - ЛА - 08.10.12

Поле - числово поле
подмножество на комплексните числа
Поле F е непразно множество с операции събиране и умножение със свойства

① Комутативност на събирането - $a+b=b+a$ $\forall a,b\in F$
② асоциативност на събирането - $(a+b)+c=a+(b+c)$
③ $\exists$ нула $<F$ така че $a+0=a$ за $\forall F$
④ за $\forall$ елемент на F има противоположен $(-a)\in F$ така че $a+(-a)=0$
⑤ комутативност на умножението - $ab=ba$ за $\forall a b\in F$
⑥ асоциативност на умножението - $(ab)c=a(bc)$ така че за $a,b,c\in F$
⑦ $\exists$ единица $1=1_F\in F$ така че $1a=a$ за $\forall a\in F$
⑧ За $\forall a\in F\setminus\{0\}$ $\exists$ обратен a^{-1} - $aa^{-1}=1$
⑨ дис $(a+b)c=ac+bc$ за $\forall a,b,c\in F$
$a(b+c)=ab+ac$

Дефиниция
Числово поле F е подмножество на $\mathbb{C}$, което съдържа поне два елемента и е затворено относно (събиране, изваждане, умножение) и деление с $f\in F\setminus\{a\}$

Всяко числово поле е поле, защото операциите събиране и умножение са комутативни и асоциативни за $\forall a\in F\setminus\{0\} \Rightarrow 0$
$\forall a\in F\setminus\{0\} \to 1=\frac{a}{a}=aa^{-1}\in F$
$\forall a\in F \Rightarrow -a=0-a\in F$ и
$a+F\setminus\{0\}$ $a^{-1}=1/a\in F$

Примери за числови полета

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

естествените числа $\mathbb{N}$ не образуват поле, защото не са затворени относно изваждане
Целите числа $\mathbb{Z}$ не са поле, защото не са затворени относно деление с $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Всяко числово поле F съдържа полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа

Доказателство:

за $\forall a \in F \Rightarrow a - a = 0 \in F$

за $a \in F \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{a}{a} = 1 \in F$

С индукция на $n \in \mathbb{N}$, $n = (n-1) + 1 \in F \Rightarrow$

~~##~~ $\mathbb{N} \in F$ за $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 - n = -n \in F$

така че $\mathbb{Z} \in F$ за $\forall a\, b \in \mathbb{Z}$

$b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \in F$, т. е. $\mathbb{Q} \subseteq F$ ∎

В множеството на остатъците $\left(\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1} \ldots \bar{n} - \overline{n-1}\}\right)$ при деление с $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ въвеждаме събиране

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n \quad \bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$$

Чрез избор на целочислени представители на $\bar{a}$ и $\bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ проверяваме коректността на тези определения т.е. независимостта им от избора на представители $a, b \in \mathbb{Z}$ на $\bar{a}, \bar{b}$, по-точно, ако $\bar{a_1} = \bar{a}$ и $\bar{b_1} = \bar{b}$ то $a_1 - a = np$ за някои $p, q \in \mathbb{Z}$ и $b_1 - b = nq$

Твърдим, че остатъка на $\overline{a+b} = \overline{a_1+b_1}$ и $\overline{ab} = \overline{a_1 b_1}$

Наистина $(a_1+b_1)-(a+b) = (a_1-a)+(b_1-b) =$
$= np + nq = n(p+q)$

$a_1 b_1 - ab = a_1 b_1 - ab_1 + ab_1 - ab = (a_1-a)b_1 + a(b_1-b) =$
$= npb_1 + anq = n(pb+aq)$

Събирането и умножението в $\mathbb{Z}_n$ изпълняват следните свойства

① $\bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a}$ - комутативност
② $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ - асоциативност
за $\forall \bar{a}\bar{b}\bar{c} \in \mathbb{Z}_n$
③ $\bar{0}+\bar{a} = \bar{a}$ за $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_a$
④ $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ има $(-\bar{a})$ при $\bar{a}+(-\bar{a}) = \overline{a+(-a)} = \bar{0}$
⑤ $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$
⑥ $(\bar{a}\bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\bar{c})$
⑦ $\bar{1}\bar{a} = \bar{a}$
⑧ $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$

Лема Нека p е просто число и $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ тогава изображението

$$\mu_{\bar{a}} : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p, \mu_{\bar{a}}(\bar{x}) = \bar{a}\bar{x} = \overline{ax}$$

за $\forall x \in \mathbb{Z}_p$

е взаимно еднозначно

Доказателство:

Ако

$\overline{ax} = \overline{ay} = M_{\bar{a}}(\bar{x}) = M_{\bar{a}}(\bar{y})$ т.е. $ay - ax = a(y-x) = pz$ за някое $z \in \mathbb{Z}$, простото число p дели произведението $a(y-x)$ на a и $y-x$ но не дели a така че p дели $y-x$ и $\bar{x} = \bar{y}$

Това доказва че за $\bar{x} \neq \bar{y}$ имаме различни образи $M_{\bar{a}}(\bar{x}) + M_{\bar{a}}(\bar{y}) \Rightarrow$ образа на $M_{\bar{a}}$ т.е $\operatorname{Im} M_{\bar{a}} = M_a(\mathbb{Z}_p) = \{ M_{\bar{a}}(\bar{a}) = \overline{ax}, \forall x \in \mathbb{Z}_p \}$

се състои от p различни елемента и съвпада с $\mathbb{Z}_p$ ✱

Твърдение

За всяко просто число p остатъците $\mathbb{Z}_p$ при деление с p образуват поле

$(\bar{a}\bar{b} = \bar{1}$ и $\exists (\bar{a})^{-1} = \bar{b})$

Метод на Гаус – Жордан за решаване на системи линейни уравнения, матрици, елементарни преобразувания

Линейна система уравнения е система от вида

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{s1}x_1 + \dots a_{sn}x_n = b_s \\ \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Тук x_1, x_m се наричат променливи
a_{ij} се нарича коефициент на системата
$b_i \in F$ се наричат свободни членове
Казваме $c = (c_1 \dots c_n) \in F^n \in F_x \dots F^n$ е
решение на (1) ако заместването
$(x_1, x_n) = (c_1)$ дава верни равенства $\sum_{i=1}^{n}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i \text{ за } \forall \ 1 \leq i \leq m$$

Видове системи линейни уравнения

в зависимост от техните решения

несъвместима (няма решение) / съвместима

определена (има точно 1 решение) / неопределена (има >1 решения)

Правоъгълна таблица от числа се нарича матрица
Множеството на матриците – m реда и n стълба
и елементи от F бележим с $M_{m \times n}(F)$ или $F_{m \times n}$

Дефиниция
Матрицата $(A/b) = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} = b_1 \\ a_{i1} \dots a_{in} = b_n \\ a_{m1} \dots a_{mn} = b_m \end{vmatrix}$

се нарича разширена матрица на
система линейни уравнения

Дефиниция
Елементарните преобразувания върху редовете $a_1 \dots a_m$ на матрицата A са:

(1) (i) умножение на i-тия ред a_i с $\lambda \in F \setminus \{0\}$

(2) умножение на i-тия ред с $\mu \in F$ и прибавяне към j-тия ред

(3) размяна на i-тия с j-тия ред

Елемент преобразуван чрез редове на разширената матрица $(A|b)$ на системата линейни уравнения, заменят редове $c_1, \dots, c_m$ на $(A|b)$ с техни линейни комбинации, обратими се чрез елементарно преобразуване и запазват решенията на тази система

Доказателство: $(\Delta)(A|b) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_m \end{pmatrix} \mapsto$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \lambda c_i \\ c_m \end{pmatrix} (\Delta\Delta)$$

редовете на системата $(\Delta\Delta)$ са линейна комбинация на редовете на (Δ)
(Δ) се получава от $(\Delta\Delta)$ чрез умножение на i-тия ред с λ. Всички решения на (Δ) са решения на $(\Delta\Delta)$. Съгласно обратимостта с елементарно преобразуване от ~~свойствен~~ същият вид решенията на (Δ) и $(\Delta\Delta)$ съвпадат

Нека

$$(\square)\ (A|b) = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_i \\ r_j \\ r_m \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r_1 \\ r_i \\ r_j + \mu r_i \\ r_m \end{pmatrix} \quad (\square\square)$$

Ако умножим i-тия ред на $(\square\square)$ с $-\mu$ и прибавим към j-тия ред получаваме $(\square)$

За разместване на уравненията

$$\begin{matrix} (A|b) \\ (\otimes) \end{matrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_i \\ r_j \\ r_m \end{pmatrix} \longmapsto \underset{(\otimes\otimes)}{J} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_j \\ r_i \\ r_m \end{pmatrix}$$

край

Задача:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 19 \\ 2 & -1 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 19 \\ 2 & -1 & 2 & 15 \end{array}\right) \begin{matrix} R_2 \mapsto R_2 - 3R_1 \\ \longleftrightarrow \\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} R_2 \mapsto R_3 \\ \longleftrightarrow \\ R_3 \mapsto R_2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & -7 & -8 \end{array}\right) \begin{matrix} R_3 \mapsto R_3 - 4R_2 \\ \longrightarrow \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} R_1 \mapsto R_1 - 2R_3 \\ R_2 \mapsto R_2 + 2R_3 \\ \longrightarrow \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{R_1 \mapsto R_1 + R_2}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

т.е $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_3 = 4$

Дефиниция

Разширената матрица на система линейни уравнения е в Гаусов вид ако:

1. Няма редове чисто леви страни са съставени само от нули
2. Първият ненулев елемент в ред е 1-ца (водеща единица)
3. В/в всеки следващ ред номерът на стълба на водещата 1-ца е по-голям от този на предшестващият ред

В Гаусовият вид под водеща единица има само нули

Гаус - Жорданов вид е такъв Гаусов вид на който стълбовете на водещите 1-ци са изчистени с нули и над водещите 1-ци

Твърдение:

Всяка система линейни уравнения се свежда до Гаусов вид.
Всяка система линейни уравнения се свежда до Гаус - Жорданов вид

Доказателство:

Нека i_1 е минималният номер на ненулев стълб (A|b)
чрез разместване на редове постигаме $a_{1,i_1} \neq 0$. Умножаваме 1-ви ред с $1/a_{1i_1}$ и получаваме $a_{1i_1} = 1$

Детерминанта, транспонирана

$$\begin{vmatrix} a_{1i}x_i + a_{i2}x_2 = b_i & | a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & | -a_{12} \end{vmatrix}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1 a_{22} - a_{12}b_2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \text{ за } \Delta \neq 0, x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \quad \Delta \neq 0, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$